



گزینه ۱

۱

$$\tan^2 x + (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$(\tan x + 1)(\tan x + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \dots \\ x = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \dots \end{cases}$$

گزینه ۲

۲

$$S_{\text{قاعده}} = S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi}{2\pi} \times \pi \times 10^2 = 10\pi$$

$$h = 20 \text{ (ارتفاع)}$$

$$V = S \cdot h = 10\pi \times 20 = 200\pi \text{ (حجم)}$$

گزینه ۲

۳

$$\frac{2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha} - \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\sin^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - \cot \alpha = 3^2 - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

گزینه ۲

۴

$$\left| \frac{a+1}{a-1} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{a-1} = 2 \Rightarrow 2a - 2 = a + 1 \Rightarrow a = 3 \\ \frac{a+1}{a-1} = -2 \Rightarrow a + 1 = -2a + 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\max g(x) = \left| a + \frac{1}{a} \right| = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

می‌دانیم اگر T دوره تناوب تابع f باشد، داریم:

$$f(x + T) = f(x)$$

حال به امتحان کردن گزینه‌ها می‌پردازیم:
گزینه "۱":

$$f(x + 2\pi) = \tan(x + 2\pi) - |\sin(x + 2\pi)| = \tan x - |\sin x| = f(x) \quad \checkmark$$

گزینه "۲":

$$f(x + \pi) = \tan(x + \pi) - \underbrace{|\sin(x + \pi)|}_{-\sin x} = \tan x - |\sin x| = f(x) \quad \checkmark$$

گزینه "۳":

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(x + \frac{\pi}{2}) - |\sin(x + \frac{\pi}{2})| = -\cot x - |\cos x| = f(x) \quad \times$$

گزینه "۴":

$$f(x + \frac{\pi}{4}) = \tan(x + \frac{\pi}{4}) - |\sin(x + \frac{\pi}{4})| = f(x) \quad \times$$

گزینه "۱" و "۲" هر دو در شرط $f(x + T) = f(x)$ صدق می‌کند، اما مقدار کوچک‌تر دوره تناوب است، پس $T = \pi$.

$$\alpha + 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \cos 90^\circ$$

$$90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = -\cos 90^\circ$$

$$180^\circ + 90^\circ = 270^\circ \Rightarrow \tan 180^\circ = -\tan 90^\circ$$

$$A = \frac{\sin \alpha}{\cos 90^\circ} + \frac{\cos 90^\circ}{\cos 90^\circ} + \frac{\tan 180^\circ}{\tan 90^\circ} = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$\begin{aligned} \cos 90^\circ &= 2\cos^2 45^\circ - 1 = 2(a^2 - 1) - 1 \\ &= 2(a^2 - 1) - 1 = 2a^2 - 3 \end{aligned}$$

$$\cos 45^\circ = 2\cos^2 22.5^\circ - 1 = 2a^2 - 1$$

$$5 \sin x - 5 \cos x = 7 \cos x + \sin x \Rightarrow 4 \sin x = 12 \cos x \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{3}{4} \\ \cot x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

می‌دانیم:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{12}{25}$$

باتوجه به اینکه $y = 2 \sin^2 x - 1 = -(1 - 2 \sin^2 x) = -\cos 2x$ پس در مرحله اول باید نمودار $y = -\cos 2x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم تا نمودار $y = \cos 2x$ به دست آید. در مرحله دوم با انبساط افقی با ضریب ۲ آن را به نمودار $y = \cos x$ تبدیل می‌کنیم و در آخر آن را $\frac{\pi}{3}$ واحد به راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ به دست آید.

چون دوره تناوب $f(x)$ برابر ۸ است پس:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(3 - 2f(1 - 4x)) \Rightarrow T = \frac{8}{|-4|} = 2$$

$$T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \max &= 2 \Rightarrow |a| + c = 2 \\ \min &= -3 \Rightarrow -|a| + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}, \quad |a| = \frac{5}{2} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{5}{2}$$

نمودار به صورت کسینوسی است، بنابراین:

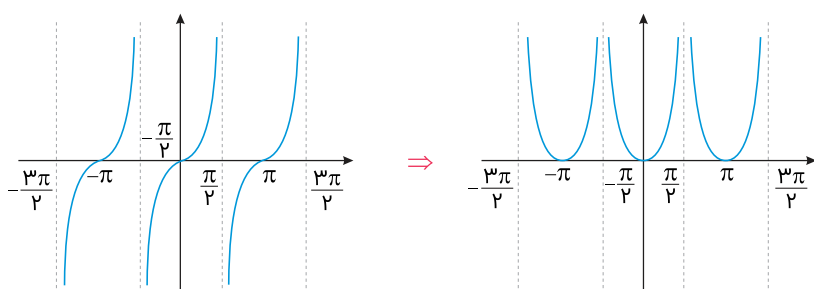
$$y = \frac{5}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{5}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cot 2x$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = -2 \cot 2x \tan 2x = -2$$

ابتدا نمودار تابع $y = \tan x$ و سپس نمودار $f(x) = |\tan x|$ را رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل واضح است که در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ تابع $|\tan x|$ صعودی است. دقت کنید در بازه $(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$ تابع، نه صعودی است نه نزولی. در بازه $(-\frac{3\pi}{2}, -\pi)$ نزولی و در بازه $(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$ صعودی است.

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \frac{1}{16} = 2 \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{31}{16}$$

$$\Rightarrow |\sin \alpha - \cos \alpha| = \frac{\sqrt{31}}{4}$$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = 2 \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = 2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 3 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{3}$$

$$A = \tan \alpha + 2 \cot \alpha = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

باتوجه به شکل، a و b هردو مثبت هستند. پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \max = 5 \\ \min = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 5 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \times b \times c = 3$$

$$S(\triangle BDC) = \frac{1}{2} BC \times DC \sin 45^\circ = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times DC \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \Rightarrow DC = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times (2 + 2\sqrt{2}) \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= (1 + \sqrt{2}) \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}(2 + \sqrt{2})$$

$$S(\triangle ABD) = \frac{5}{2}(2 + \sqrt{2}) - 5 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$۱) ۰ \leq x < ۲ \Rightarrow ۰ \leq \frac{x}{۲} < ۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۰$$

پس معادله $۱ = \frac{۱}{۲}$ فاقد جواب است.

$$۲) ۲ \leq x \leq \pi \Rightarrow ۱ \leq \frac{x}{۲} \leq \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۱ \Rightarrow |\sin x| = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۶} \notin [۲, \pi] \\ x = \frac{5\pi}{۶} \in [۲, \pi] \end{cases} \\ \sin x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{در بازه } [۰, \pi] \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

پس معادله فقط یک جواب $\frac{5\pi}{۶}$ دارد.

$$\sin(۳x + ۴y) = \sin(۳(x + y) + y) = \sin(۹۰^\circ + y) = \cos y$$

$$\cos(۶x + ۷y) = \cos(۶(x + y) + y) = \cos(۱۸۰^\circ + y) = -\cos y$$

$$A = \cos y - \cos y = ۰$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(-۷۵^\circ) &= -\sin ۷۵^\circ = -\frac{۱}{۲} \\ \tan \frac{۱۷\pi}{۴} &= \tan \frac{\pi}{۴} = ۱ \\ \cos\left(-\frac{۱۳\pi}{۳}\right) &= \cos \frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} \\ \cot(-۴۵^\circ) &= -\cot ۴۵^\circ = -۱ \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{-\frac{۱}{۲} + ۱}{\frac{۱}{۲} - (-۱)} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$